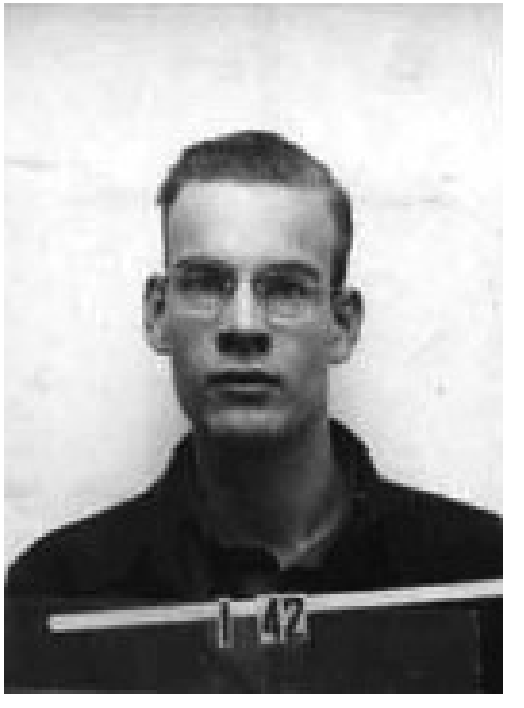
«Il più grande difetto della razza umana è la nostra incapacità di comprendere l'esponenziale»

[A. A. Bartlett - Arithmetic, Population and Energy - Department of Physics - University of Colorado Boulder]

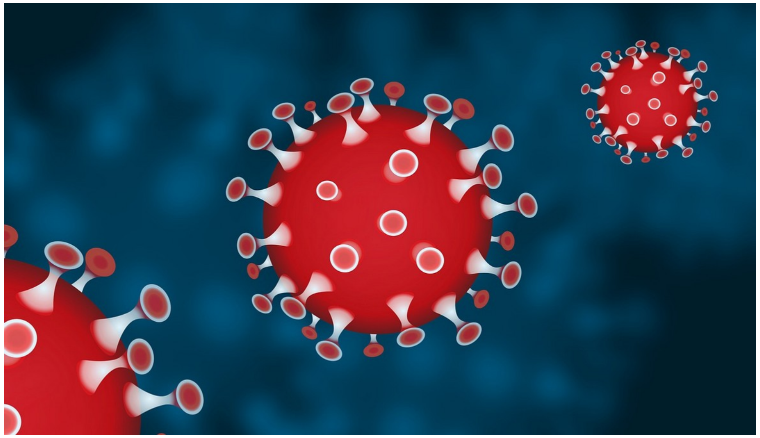



Erika Carretto

Due problemi

Eutrofizzazione

Diffusione di virus



*Modelli di crescita*

# Eutrofizzazione

Dal greco *eutrophòs* = ben nutrito, è il **processo di arricchimento in nutrienti** (soprattutto sali di fosforo e azoto) degli ecosistemi acquatici. L'apporto di nutrienti nei corsi d'acqua e nel mare è un fatto naturale ma può venire fortemente accelerato dalle attività umane e dal conseguente **inquinamento** dell'acqua (per es. da scarichi urbani, uso di detergenti contenenti polifosfati, uso di fertilizzanti in agricoltura,  concentramento degli allevamenti zootecnici). Il fenomeno comporta una **crescita eccessiva di alghe**, piante acquatiche e fitoplancton. Il loro sviluppo incontrollato rende difficile alla luce solare di penetrare nelle acque più profonde inibendo il processo della fotosintesi delle alghe e delle piante acquatiche poste in profondità; la conseguente marcescenza della biomassa algale e la riduzione dell'ossigeno (anossia) porta alla morte della fauna ittica e delle altre forme viventi.

# Una storia francese

*Un giorno un lago viene colonizzato da un’alga altamente tossica. Al momento della scoperta la colonia ricopre molto meno di un metro quadrato (circa un decimillesimo) della superficie, ma presto si scopre che* ***ogni giorno le dimensioni della colonia raddoppiano****.*

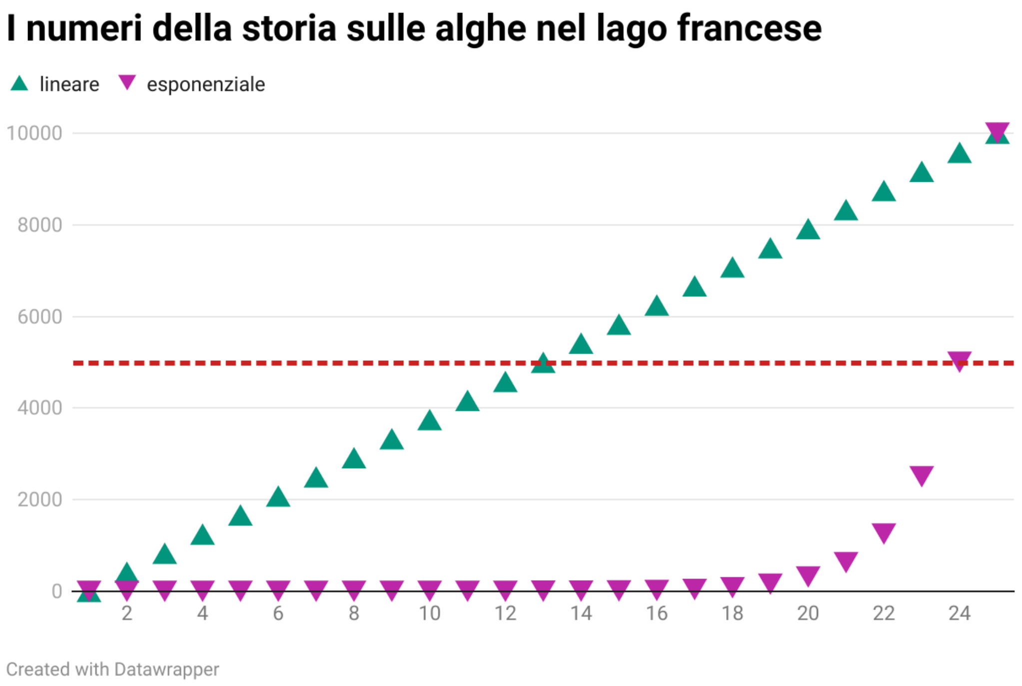
*Alcuni esperti stimano che* ***ci vorranno circa venticinque*** *giorni prima che la colonia invada completamente il lago, soffocando tutti i pesci che in esso vivono. Data la crescita a macchia di leopardo e l’estensione ancora trascurabile della colonia,* ***le autorità di bacino decidono di aspettare fino a quando l’alga non abbia ricoperto almeno la metà delle acque****, per poterla rimuovere a costi inferiori. Ma in che giorno si raggiungerà la soglia di guardia? Se la crescita fosse lineare, intorno al tredicesimo giorno dalla scoperta della colonia.*

*Tuttavia, essendo esponenziale, la diffusione subdolamente lenta osservata nelle prime tre settimane è foriera di un’ accelerazione devastante nella quarta. Infatti,* ***dopo circa venti giorni il tre per cento del lago risulta ricoperto dall’alga****.*

*Le autorità dormono sonni tranquilli. Poi, all’improvviso,* ***tra il ventunesimo e il ventiquattresimo*** *giorno l’alga si desta dal suo torpore e colonizza metà del lago. Restano solo ventiquattro ore per scongiurare il disastro, un tempo ormai insufficiente per sperare di salvare il lago e i suoi pesci.*

# Tabella e grafico

| giorno | Superficie coperta [%] |
|---|---|
| 19 | 1.56% |
| 20 | 3.13% |
| 21 | 6.25% |
| 22 | 12.5% |
| 23 | 25% |
| 24 | 50% |
| 25 | 100% |



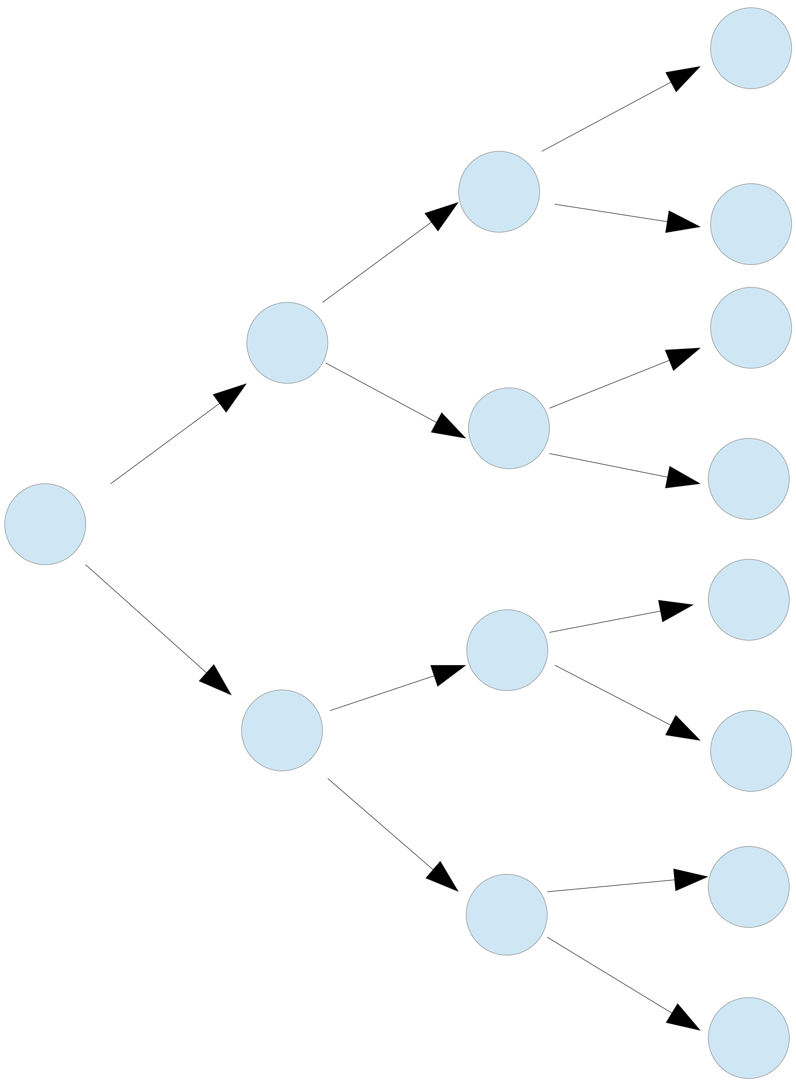
# Un semplice modello matematico di diffusione

Le fasi iniziali di diffusione di alcuni fenomeni naturali possono essere descritte da una progressione geometrica.

Cos'è una ***progressione geometrica***?

# Progressione geometrica

*Semplice esempio*: **ogni giorno le dimensioni della colonia di alghe raddoppiano**



| Giorno | Metri quadri | Relazione |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $c_0=1$ |
| 1 | 2 | $c_1=2c_0$ |
| 2 | 4 | $c_2=2c_1=2^2c_0$ |
| 3 | 8 | $c_3=2c_2=2^3c_0$ |
| 4 | 16 | $c_4=2c_3=2^4c_0$ |
| ... | ... | ... |
| n | $2^n$ | $c_n=2c_{n-1}=2^nc_0$ |

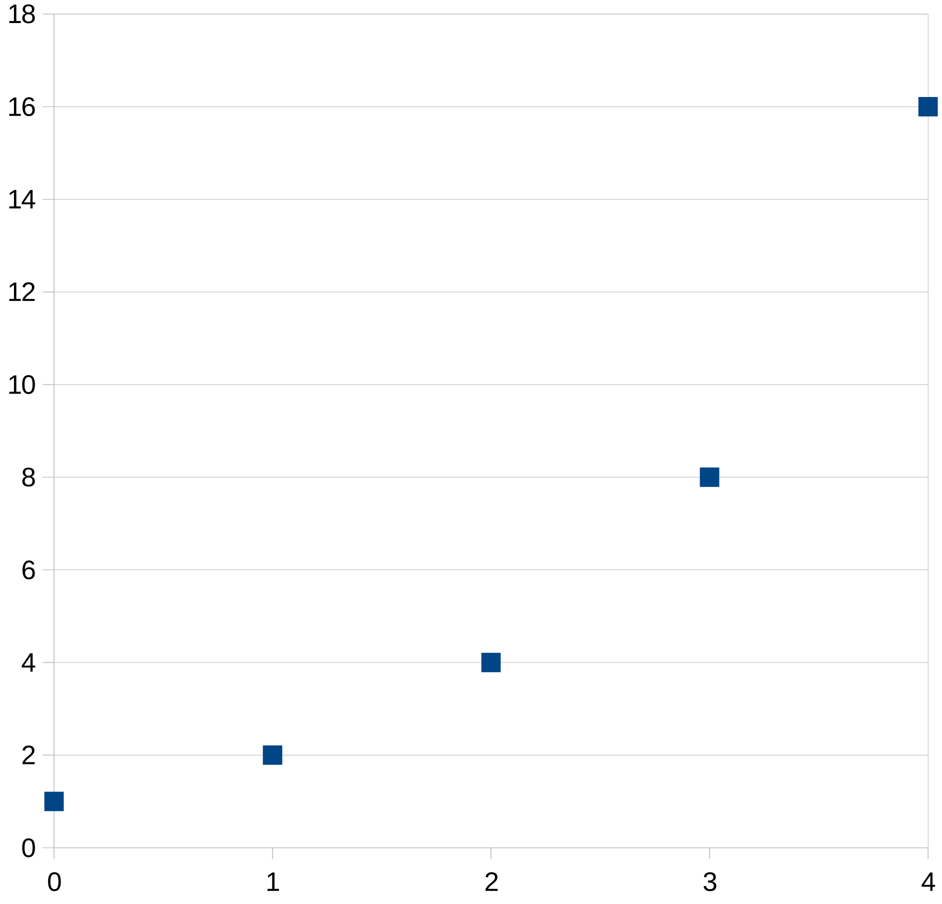
Nell'n-esimo giorno si avranno $c_0 \cdot 2^n$ metri quadri ricoperti dalle alghe, dove $c_0$ è l’area inizialmente ricoperta da alghe.

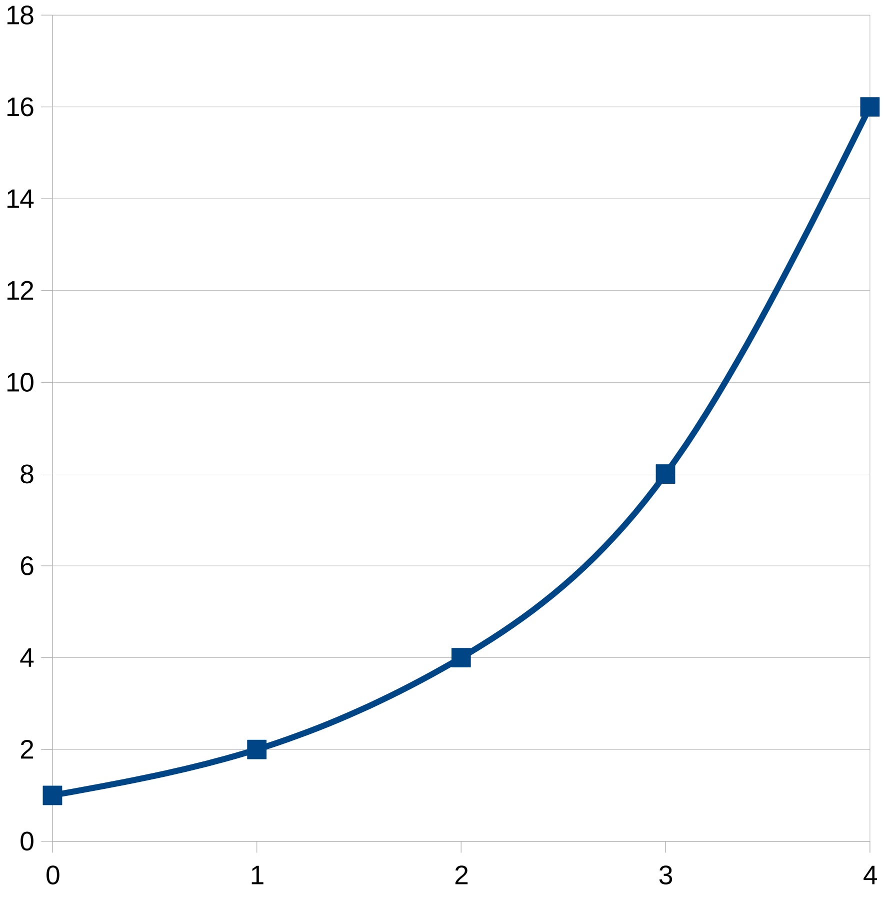
# Alcune domande...

Quali *funzioni* si possono utilizzare per descrivere fenomeni di questo tipo?

Quali sono le loro caratteristiche principali e come possiamo studiarle?

# Dalla progressione geometrica alla funzione esponenziale




**Modello discreto**:
grafico della progressione geometrica

**Modello continuo**:
grafico della funzione esponenziale

# Perché il passaggio al continuo?

Il passaggio al continuo permette di utilizzare i potenti mezzi dell'**Analisi** per studiare l'andamento del fenomeno.

La *derivata* per esempio permette di studiare il tasso di crescita del fenomeno, la monotonia e la concavità della funzione usata come modello del fenomeno.

Il suo studio permette di rispondere a questioni del tipo: l’area coperta da alghe aumenta “sempre”

*ma in che modo?*

# Funzione logistica e limite del modello esponenziale

All'inizio lo sviluppo del fenomeno può essere descritto da una funzione esponenziale, successivamente **rallenta** per poi raggiungere una **posizione asintotica** dove non c'è più crescita.

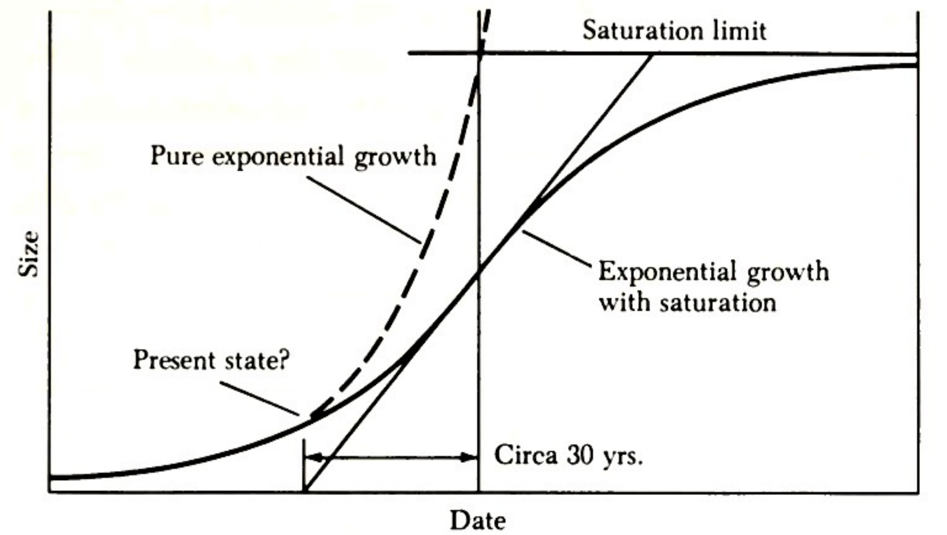



Figure 1.5. General Form of the Logistic Curve

From Derek J. de Solla Price, *Science Since Babylon* (New Haven, Yale University Press, 1961).

Questo andamento è rappresentato da una funzione detta ***logistica***.

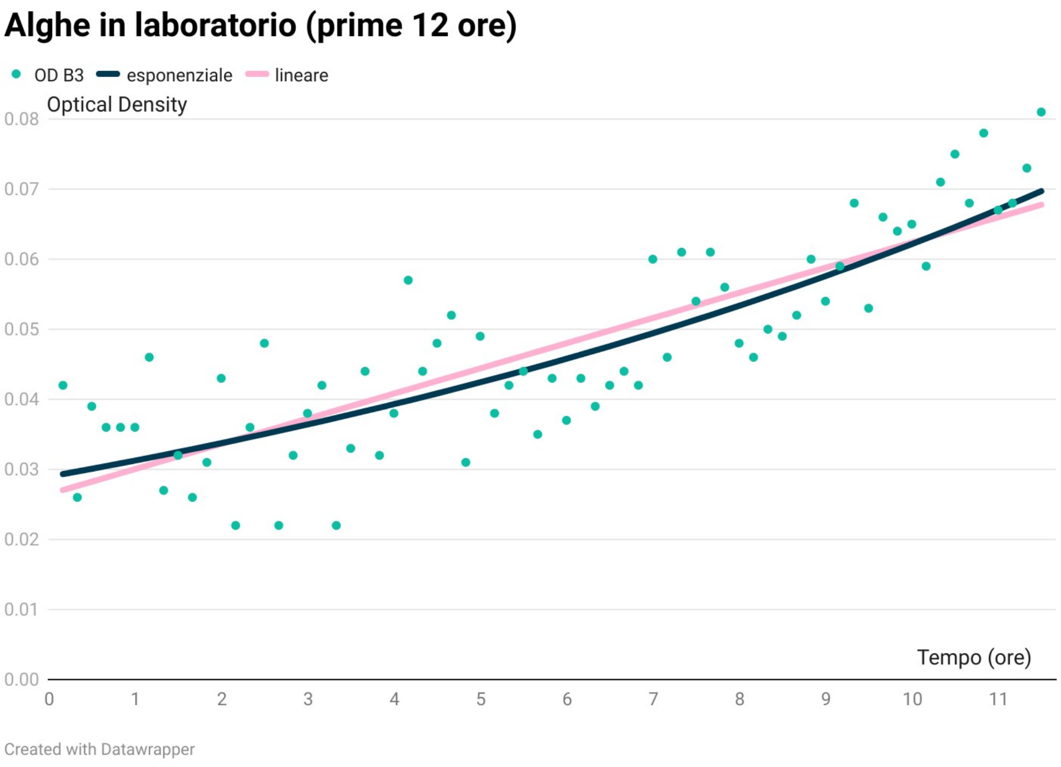
# Alghe: dati di laboratorio e modelli di crescita

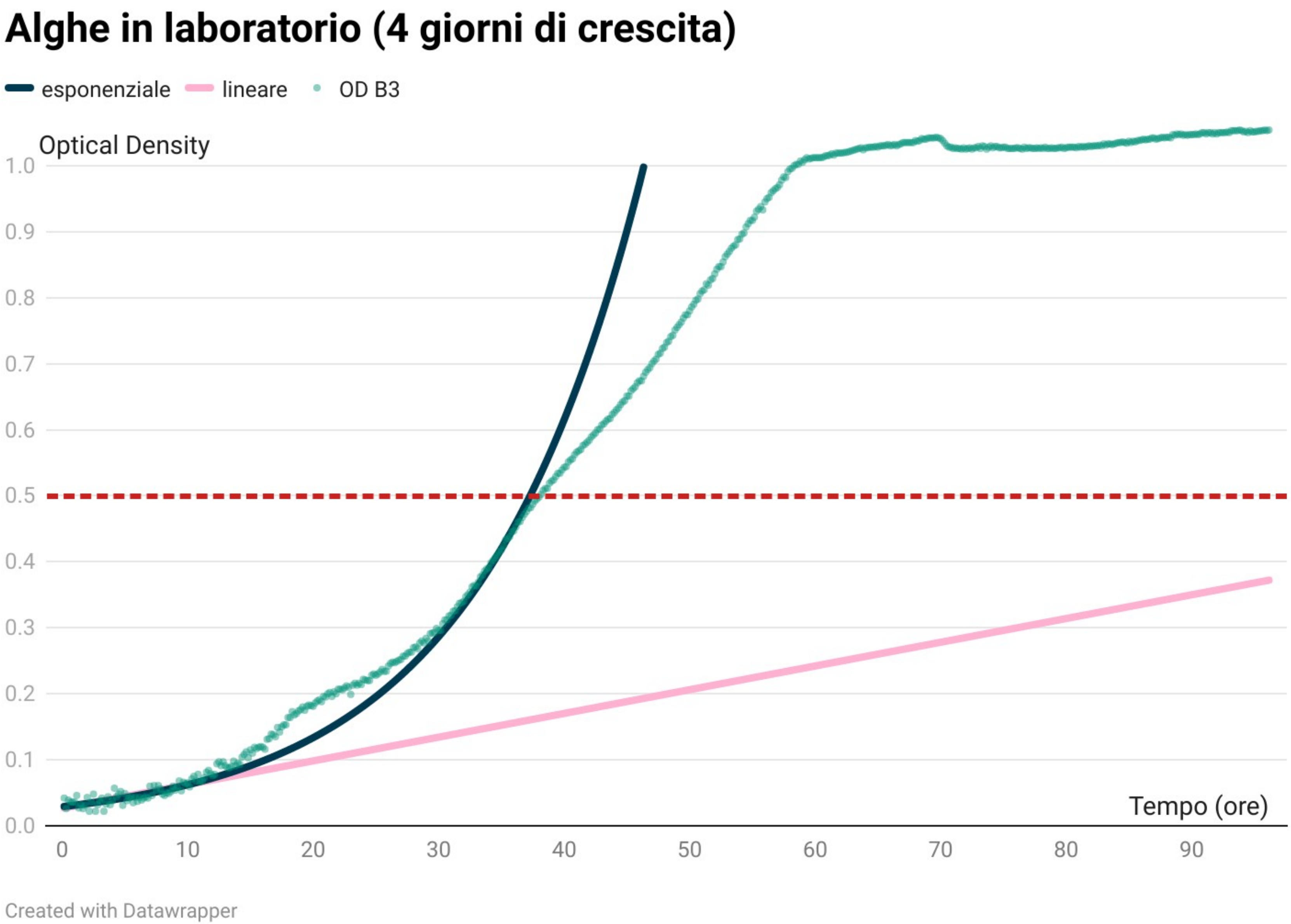
## Esponenziale o lineare?

$$y = b \cdot e^{ax} \qquad y = mx + q$$

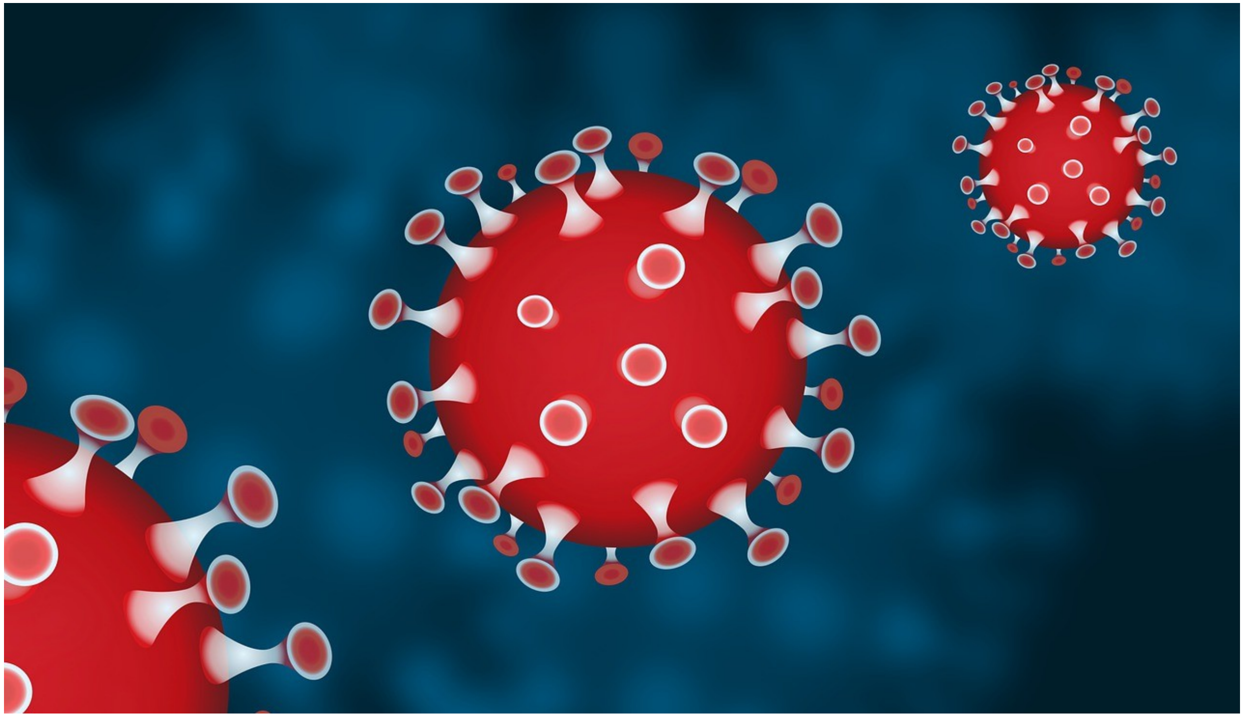
$b \approx 0.03$
$a \approx 2 \cdot 10^{-5}$

$m \approx 10^{-6}$
$q \approx 0.03$




Alghe in laboratorio (4 giorni di crescita)
esponenziale
lineare
OD B3
Optical Density
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
Tempo (ore)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Created with Datawrapper

# Epidemia covid-19



# I dati italiani relativi
# ai **casi “accertati” di contagio**
# periodo dal 20.02.2020 al 01.03.2020

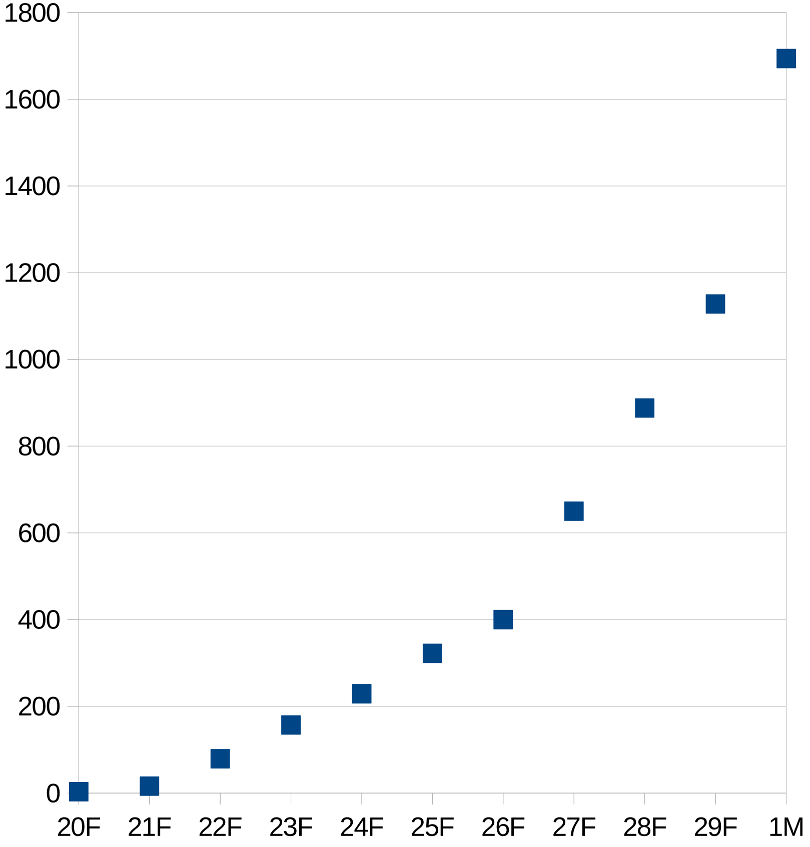
Tabella

| DATA | TOTALE CASI “ACCERTATI” | NUOVI CASI “ACCERTATI” |
|---|---|---|
| 20.02.2020 | 3 | 3 |
| 21.02.2020 | 16 | 13 |
| 22.02.2020 | 79 | 63 |
| 23.02.2020 | 157 | 78 |
| 24.02.2020 | 229 | 72 |
| 25.02.2020 | 322 | 93 |
| 26.02.2020 | 400 | 78 |
| 27.02.2020 | 650 | 250 |
| 28.02.2020 | 888 | 238 |
| 29.02.2020 | 1128 | 240 |
| 01.03.2020 | 1694 | 566 |

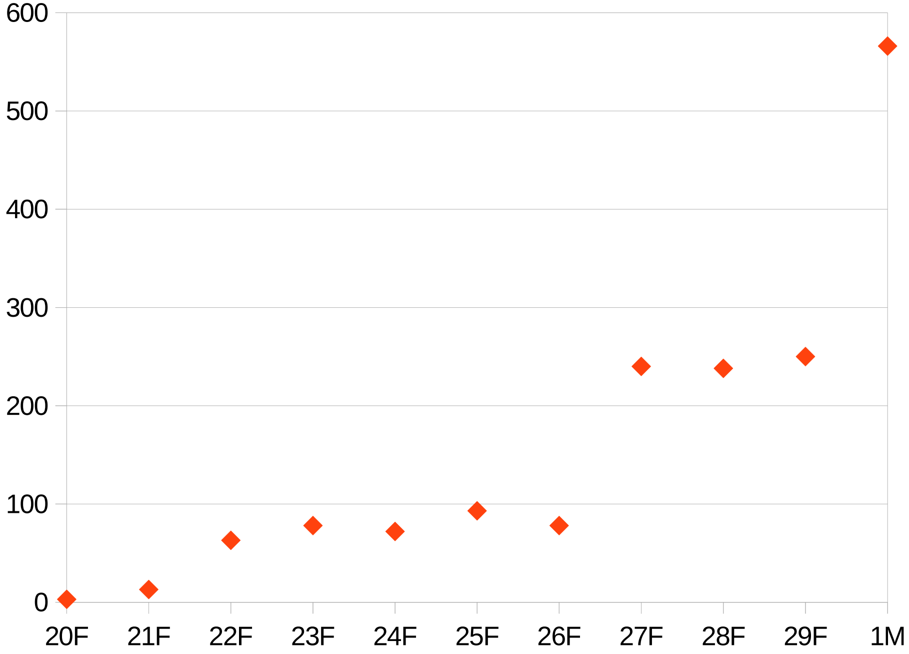
Dati Ministero della Salute - Protezione Civile

# GRAFICI

TOTALE CASI “ACCERTATI”




NUOVI CASI “ACCERTATI”




Rapidità di propagazione

Andamento e fluttuazioni giornaliere

# Un possibile modello
## a partire dai dati italiani

| 20.02 | 21.02 | 22.02 | 23.02 | 24.02 | 25.02 | 26.02 | 27.02 | 28.02 | 29.02 | 01.03 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 16 | 79 | 157 | 229 | 322 | 400 | 650 | 888 | 1128 | 1694 |

A partire dal 23.02.2020 si può osservare che il numero dei casi “accertati” **raddoppia ogni due giorni**.

Per esempio:

157 * 2 = 314 circa 322

400 * 2 = 800 circa 888

888 * 2 = 1776 circa 1694

I dati italiani da un certo punto si comportano come una **progressione geometrica**.

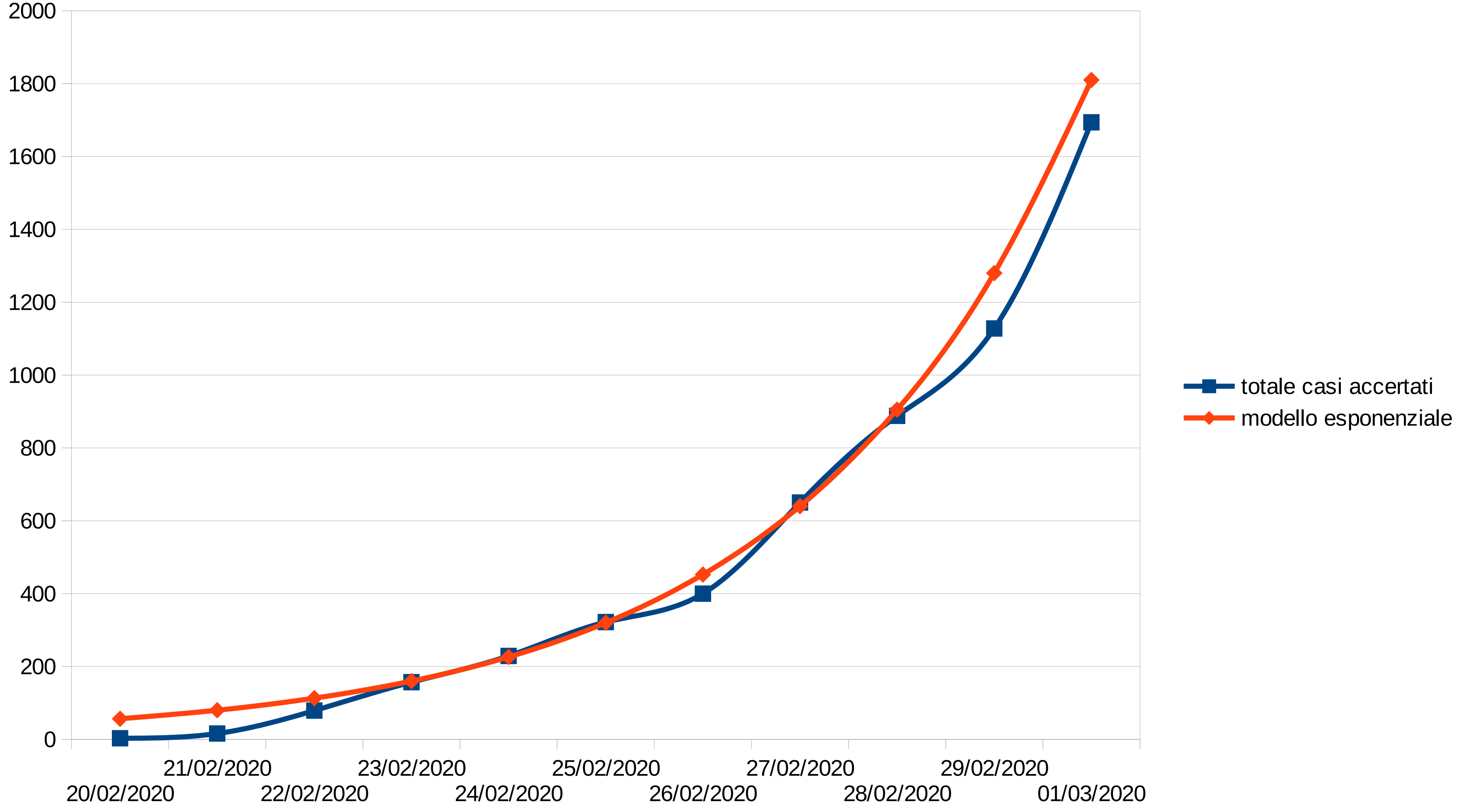
*Nel passaggio al continuo* una funzione che descrive l'andamento è:

$$y(t)=40\cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

ove $t$ = tempo, $y$ = numero di casi “accertati” in funzione del tempo.

Nel <u>breve periodo</u> di tempo considerato il numero totale di casi di contagio “accertati” aumenta esponenzialmente: ***crescita malthusiana.***

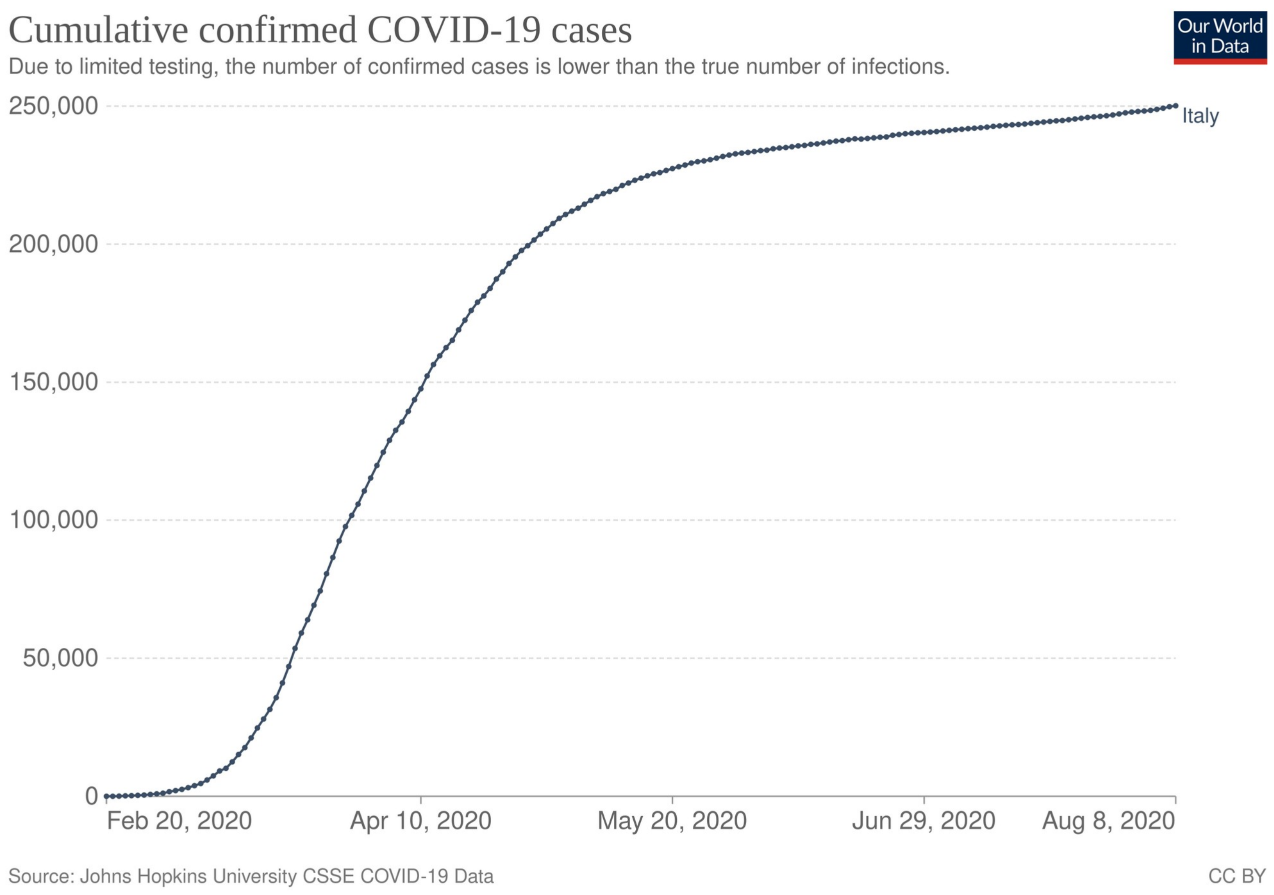
# Modello vs dati reali



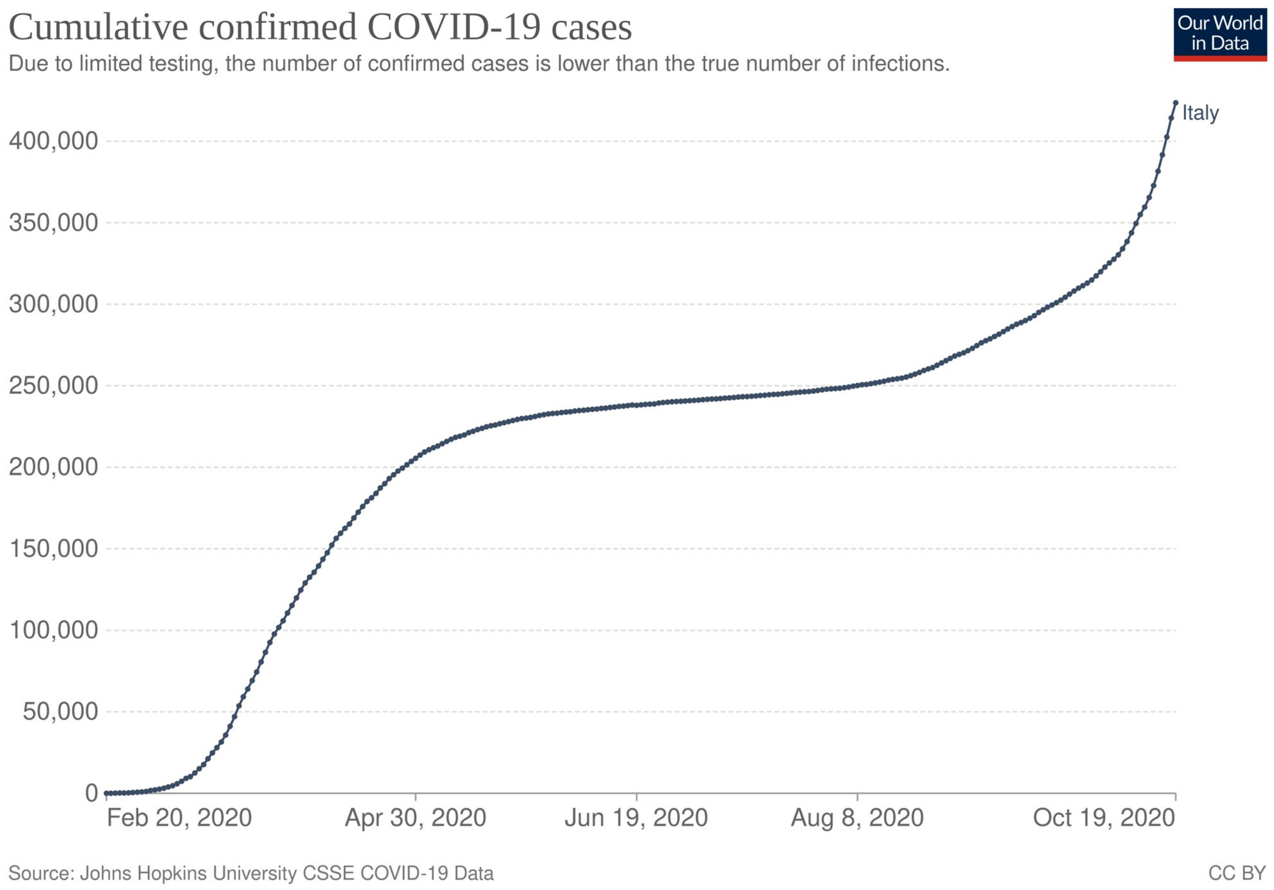

Il numero totale di casi accertati aumenta “sempre”

*ma in che modo?*

# Una esponenziale non può essere per sempre...



# ...e neanche una logistica: la realtà è complessa



# Sitografia


- https://www.albartlett.org/presentations/arithmetic_population_energy.html
- http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.198.3822&rep=rep1&type=pdf
- http://www.lafonte.tv/la-crescita-esponenziale/
- https://www.arpae.it/it/temi-ambientali/mare/scopri-di-piu/eutrofizzazione
- https://www.tandfonline.com/doi/figure/10.1080/26388081.2021.2023632?scroll=top&needAccess=true
- https://github.com/tgrbrooks/ADA
- https://mappe.protezionecivile.gov.it/it/mappe-e-dashboards-emergenze/dashboards-coronavirus
- https://ourworldindata.org/coronavirus/country/italy