I PRODOTTI NOTEVOLI

Si propone alla classe un'attività sui prodotti notevoli. Per mezzo della cosiddetta *algebra geometrica* è possibile interpretare geometricamente alcuni prodotti notevoli, favorendo così il passaggio dal concreto all'astratto, dalle nozioni di misura, equivalenza di aree, equiscomponibilità al calcolo letterale. La visualizzazione dei prodotti notevoli attraverso l'uso della geometria aiuta gli studenti a capire meglio tali formule e a ricordarle.

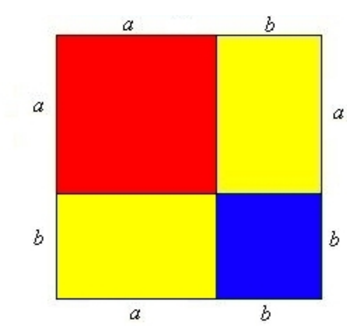
Vengono esaminati i seguenti prodotti notevoli:

- QUADRATO DI BINOMIO $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- DIFFERENZA DI QUADRATI $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- CUBO DI BINOMIO $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

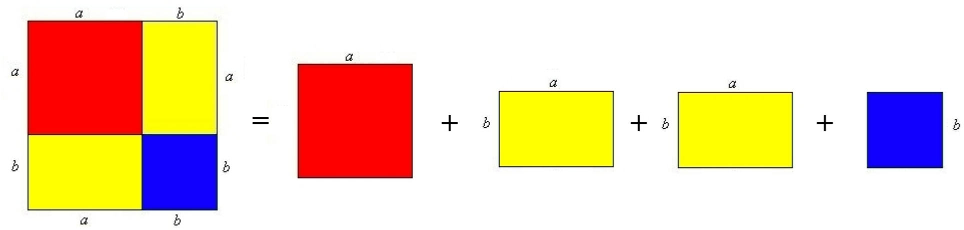
Quadrato di binomio: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Con l'uso di cartoncini colorati possiamo costruire in classe un quadrato di lato $a+b$ e poi due quadrati di lati a e b rispettivamente e due rettangoli di lati a e b.

Sovrapponendo al quadrato di lato $a+b$ gli altri quadrilateri, cioè il quadrato di lato a, quello di lato b e i due rettangoli di lati a e b, se ne verifica l'equivalenza.



In questa figura si osserva infatti che l'area del quadrato grande di lato $a+b$ è equivalente alla somma delle aree di un quadrato di lato a, di un quadrato di lato b e di due rettangoli di lati a e b.



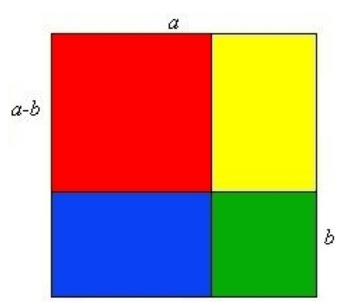
Quadrato di binomio: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

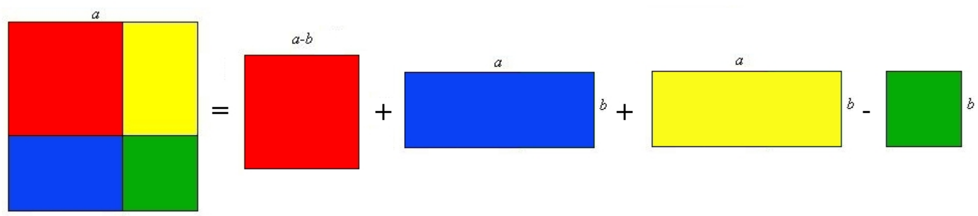
Con l'uso di un cartoncino bianco possiamo costruire in classe un quadrato di lato a e poi con la carta velina colorata un quadrato rosso di lato $a-b$ e due rettangoli, uno giallo e uno blu, di lati a e b. Utilizzando il quadrato di lato $a-b$ e i rettangoli di lati a e b per ricostruire il quadrato di lato a si osserva una sovrapposizione dei due rettangoli. Si può facilmente notare che l'area della parte sovrapposta corrisponde ad un quadrato di lato b (in figura di colore verde). Da questo deduciamo l'identità algebrica:

$$a^2 = (a-b)^2 + ab + ab - b^2,$$

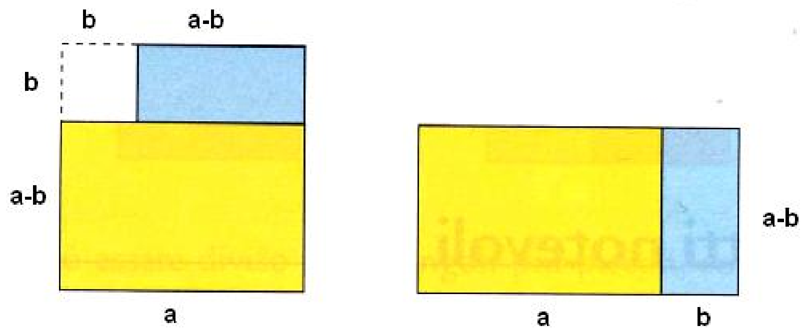
da cui riordinando i termini, otteniamo

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$





Differenza di quadrati: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$



Da un quadrato di lato a si ritaglia un quadrato di lato b (come in figura) e si ottiene così una figura di area $a^2 - b^2$ data dall'unione dei rettangoli giallo e azzurro.

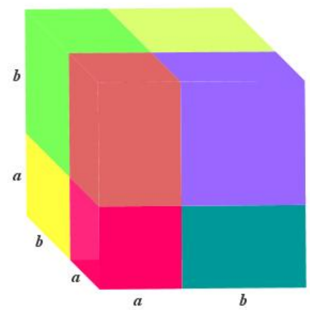
Ritagliando ora il rettangolo azzurro e incollandolo a quello giallo sul lato lungo $a - b$ si ottiene un rettangolo di lati $a - b$ e $a + b$.

Dall'equivalenza delle due figure segue l'identità

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

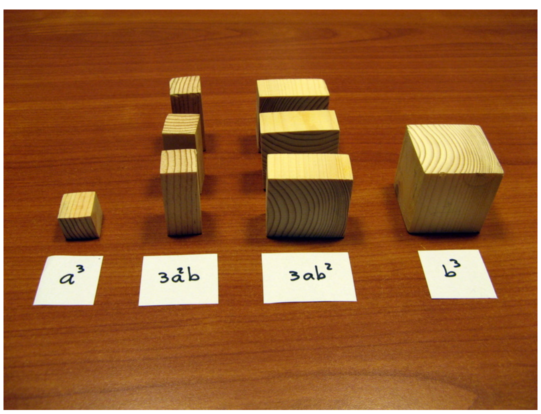
Cubo di binomio: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

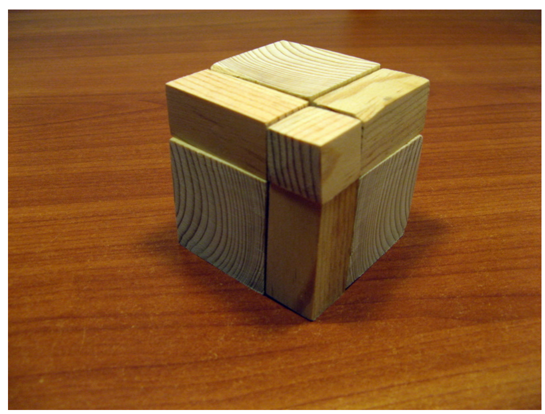
L'interpretazione geometrica del cubo di binomio si può effettuare nello spazio.



Per comporre un cubo di spigolo $a+b$ sono necessari un cubo di spigolo a, un cubo di spigolo b, tre parallelepipedi di base quadrata di lato a e altezza b e tre parallelepipedi di base quadrata di lato b e altezza a.

Nelle fotografie è raffigurata una realizzazione con cubetti in legno di quanto descritto sopra.





Questa attività può essere ovviamente proposta ed estesa anche a molti altri prodotti notevoli che qui non sono stati presi in considerazione.

Alla fine dell'attività può essere interessante fare un accenno storico all'*algebra geometrica* di Euclide, infatti negli Elementi di Euclide (circa 300 a.C.) si ritrovano tematiche di tipo algebrico, in particolare nel libro II. L'impostazione è completamente geometrica: si descrivono proprietà delle uguaglianze, si confrontano grandezze e si propone un'aritmetica delle grandezze geometriche; i simboli non hanno significato di per se stessi, ma solo in riferimento all'ambiente geometrico e dunque l'approccio euclideo non porta ancora ad un percorso verso l'astrazione e la generalizzazione, tipico della formazione della scienza algebrica.