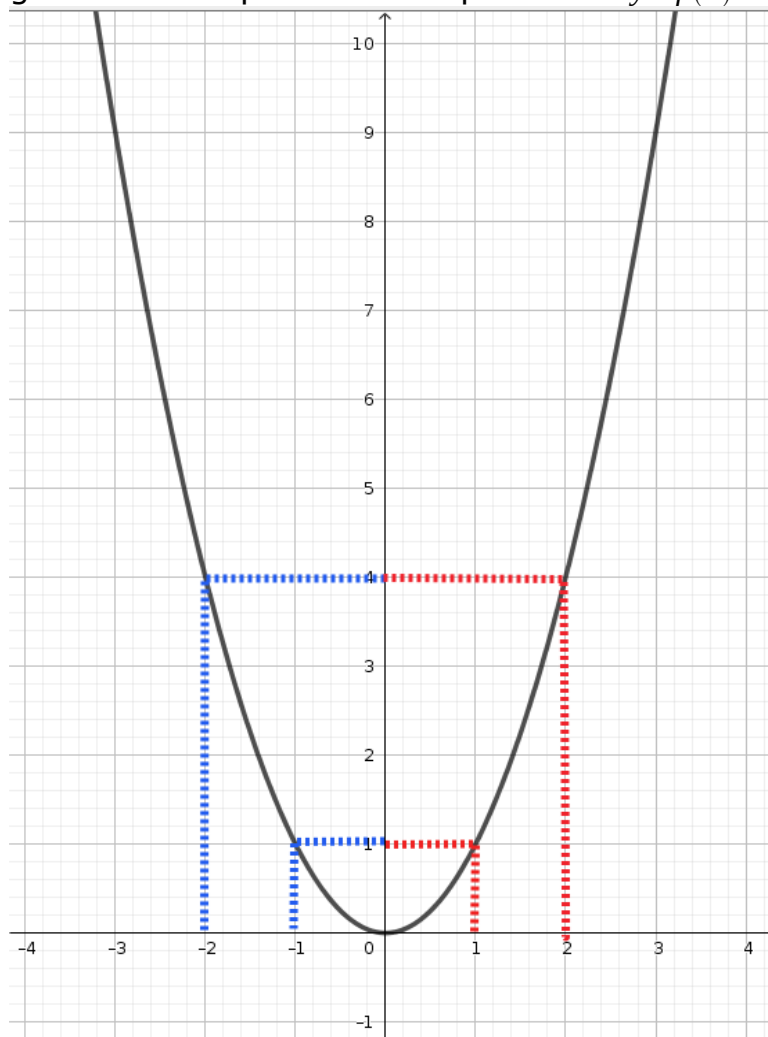


PARITÀ-DISPARITÀ della funzione e SIMMETRIE del grafico

Consideriamo il grafico di una parabola di equazione $y=f(x)=x^2$.



Come si può osservare, il grafico presenta una **simmetria rispetto all'asse y**.

Infatti si osserva che:

$$f(1)=1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=f(1)$$

$$f(-1)=1$$

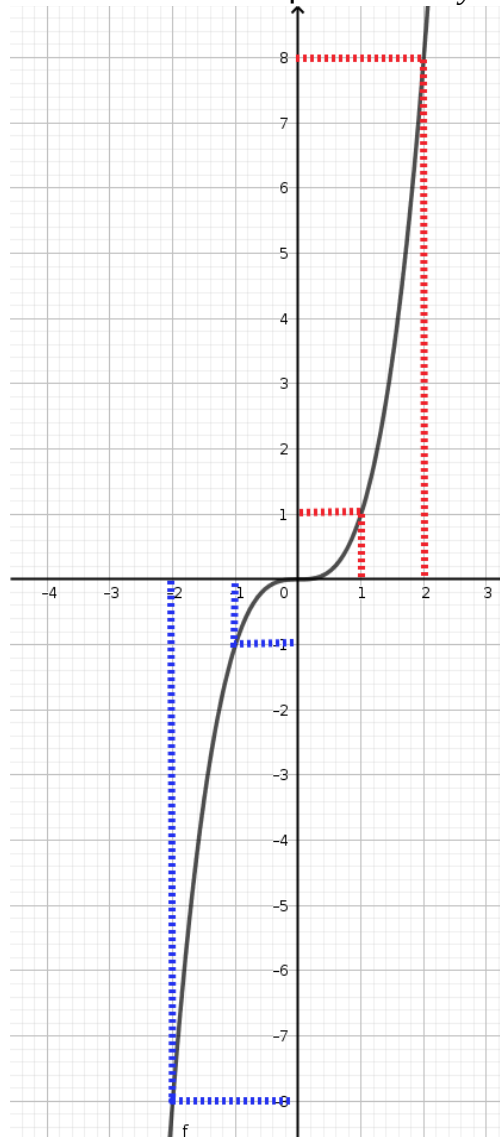
$$f(2)=4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=f(2)$$

$$f(-2)=4$$

Questa relazione vale per tutti i valori del dominio della funzione, quindi in generale si ha:

$$f(-x)=f(x) \quad \forall x \in \text{dominio}$$

Consideriamo il grafico di una cubica di equazione $y=f(x)=x^3$.



Come si può osservare, il grafico presenta una **simmetria rispetto all'origine**.

Infatti si osserva che:

$$f(1)=1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=-f(1)$$

$$f(-1)=-1$$

$$f(2)=8 \quad \rightarrow \quad f(-2)=-f(2)$$

$$f(-2)=-8$$

Questa relazione vale per tutti i valori del dominio della funzione, quindi in generale si ha:

$$f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in \text{dominio}$$

Quando non si conosce il grafico di una funzione, può essere utile valutare la presenza di simmetrie. Allora si procede sostituendo $-x$ al posto di x in $y=f(x)$ e si osserva se vale una delle seguenti relazioni:

$$f(-x)=f(x) \qquad f(-x)=-f(x)$$

Se vale la prima relazione, allora si dice che la *funzione* è **PARI** e il *grafico* presenta una **simmetria rispetto all'asse y**.

Se vale la seconda relazione, allora si dice che la *funzione* è **DISPARI** e il *grafico* presenta una **simmetria rispetto all'origine**.

Esempi:

1) La funzione $y=f(x)=3x^4-2x^2+1$ è pari o dispari?

Dominio: $(-\infty, +\infty)$.

Si consideri $x \in (-\infty, \infty)$:

$$f(-x)=3(-x)^4-2(-x)^2+1=3x^4-2x^2+1=f(x) \quad \rightarrow \quad f(-x)=f(x)$$

Allora la funzione è PARI e il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'asse y.

2) La funzione $y=f(x)=5x-x^3$ è pari o dispari?

Dominio: $(-\infty, +\infty)$.

Si consideri $x \in (-\infty, \infty)$:

$$f(-x)=5(-x)-(-x)^3=-5x+x^3=-(5x-x^3)=-f(x) \quad \rightarrow \quad f(-x)=-f(x)$$

Allora la funzione è DISPARI e il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'origine.

3) La funzione $y=f(x)=\frac{x^2-1}{x^4+1}$ è pari o dispari?

Dominio: $(-\infty, +\infty)$.

Si consideri $x \in (-\infty, \infty)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^4+1}=\frac{x^2-1}{x^4+1}=f(x) \quad \rightarrow \quad f(-x)=f(x)$$

Allora la funzione è PARI e il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'asse y.

4) La funzione $y=f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$ è pari o dispari?

Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Si consideri $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)+2}{(-x)^2-1}=\frac{-x+2}{x^2-1} \quad \text{In questo caso non vale nessuna delle due relazioni.}$$

Allora la funzione non è né pari né dispari e il suo grafico non presenta nessuna delle simmetrie viste.