FUNZIONI QUADRATICHE

FUNZIONE QUADRATICA → è una funzione che fa corrispondere ad ogni numero reale x del dominio il numero $\boxed{ax^2+bx+c}$, con a, b, c numeri reali fissati e $a \neq 0$.

ESEMPIO: la macchina x REALE → $\boxed{\text{ELEVA AL QUADRATO E AGGIUNGI 2}}$ → y REALE

INPUT OUTPUT

rappresenta la funzione quadratica descritta dalla formula $\boxed{y = x^2+2}$ o, equivalentemente, $\boxed{f(x)=x^2+2}$, dove $a=1, b=0, c=2$.

ESEMPIO: la macchina x REALE → $\boxed{\text{ELEVA AL QUADRATO E PRENDI LA METÀ}}$ → y REALE

INPUT OUTPUT

rappresenta la funzione quadratica descritta dalla formula $\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$ o, equivalentemente, $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^2}$, dove $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=0$.

★ **ZERO** di una funzione quadratica:

Per trovare eventuali zeri si pone l'OUTPUT a 0 e si studia l'equazione associata $\boxed{y=f(x)=0}$.

ES. Per trovare eventuali zeri di $y=f(x)=x^2-3x+2$ studio l'equazione $\boxed{x^2-3x+2=0}$ e trovo i due zeri $x_1=1$ e $x_2=2$.

Infatti:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2) = 9 - 8 = 1 \rightarrow$ 2 soluzioni reali e distinte

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Dal punto di vista grafico lo zero ci dà informazioni sull'ascissa dell'eventuale punto di intersezione del grafico della funzione con l'asse x.

★ SEGNO di una funzione quadratica:

per determinare il segno, cioè per valutare dove la funzione è positiva e dove è negativa, è sufficiente studiare la disequazione

$\boxed{y = f(x) > 0}$ → POSITIVITÀ

o equivalentemente

$\boxed{y = f(x) < 0}$ → NEGATIVITÀ

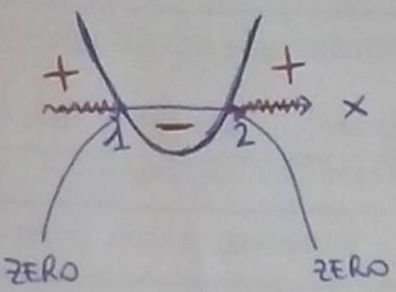
Scanned by CamScanner

Esempio: Determiniamo il segno di $y=f(x)=x^2-3x+2$.

Studio la disequazione $\boxed{x^2-3x+2>0}$:

1) $a=1$ $\cup$ (concavità verso l'alto)

2) $x^2-3x+2=0 \rightarrow x_1=1,\ x_2=2$ (zeri di f)

3) 

Si conclude che:

$x^2-3x+2>0$ per $x<1 \vee x>2$

$x^2-3x+2<0$ per $1<x<2$

Equivalentemente, facendo uso degli intervalli:

$x^2-3x+2>0$ in $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

$x^2-3x+2<0$ in $(1,2)$.

Esempio:

Determiniamo zeri e segno di $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$

Zeri: studio l'equazione $\boxed{x^2 + 2x + 1 = 0}$

$\Delta = 4 - 4 = 0 \rightarrow$ 2 soluzioni reali e coincidenti

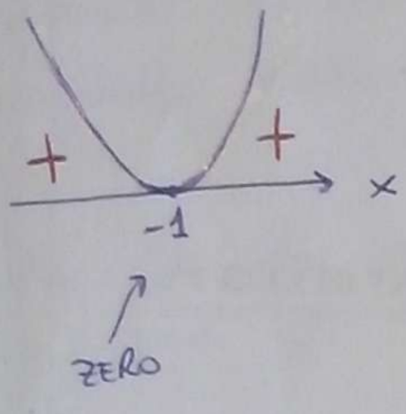
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$$

Segno: studio la disequazione $\boxed{x^2 + 2x + 1 > 0}$:

1) $a = 1$ ∪

2) $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -1$ (zero di f)

3)



Si conclude che:

$x^2 + 2x + 1 > 0$ per $x \neq -1$

$x^2 + 2x + 1 < 0$ $\nexists\, x \in \mathbb{R}$

★ GRAFICI DI FUNZIONI QUADRATICHE : il grafico di una funzione quadratica è una PARABOLA.

Per disegnare il grafico dell'equazione $y=f(x)=ax^2+bx+c$ è necessario conoscere almeno 3 suoi punti che possiamo determinare così:

1) Vertice + intersezioni asse x (se $\Delta > 0$)

2) Vertice + intersezione asse y + punto ottenuto dando un valore a x diverso dai precedenti e trovando il corrispondente valore di y sostituendolo nella formula $y=ax^2+bx+c$ (se $\Delta \leq 0$)

Si ricorda che la parabola è simmetrica rispetto al suo asse di simmetria passante per il vertice.

ES. Disegno il grafico di $\boxed{y=x^2-3x+2}$

- VERTICE $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

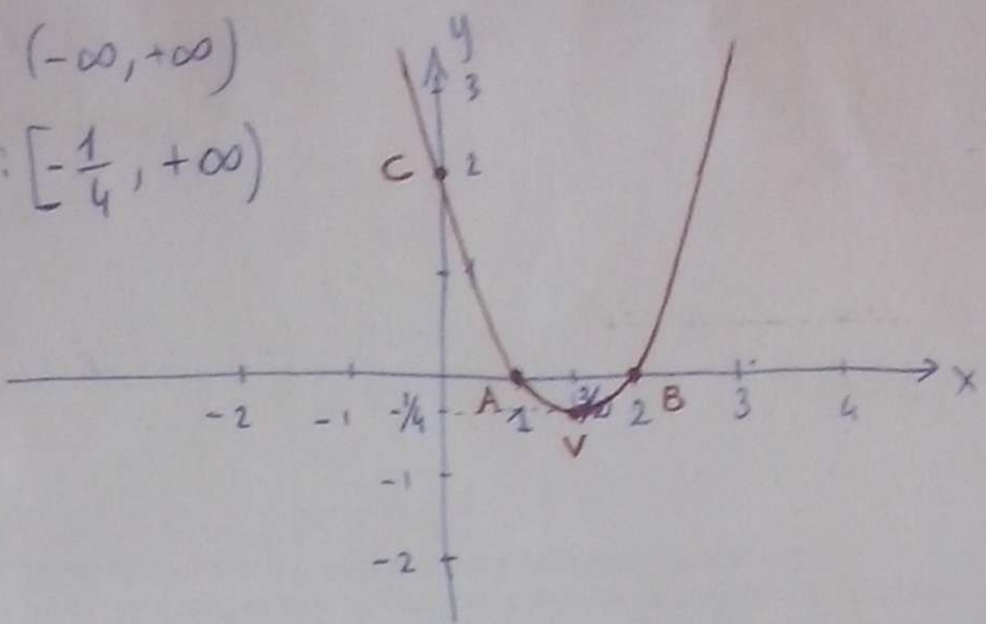
$\Delta = 9-4(2) = 9-8 = 1 \rightarrow$ CASO $\Delta > 0$

- Intersezioni asse X:

$x^2-3x+2=0 \quad x_1=1 \quad x_2=2 \rightarrow A(1,0), B(2,0)$

DOMINIO: $(-\infty, +\infty)$

IMMAGINE: $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$



<u>NOTA BENE</u> Per vedere dove la parabola interseca l'asse y basta porre $x=0$ nella formula $y = ax^2 + bx + c$ e si ottiene il punto $(0, c)$

Nel nostro caso: $y = 0 - 3(0) + 2 = 2$

$\rightarrow \; C(0, 2)$

Il grafico conferma quanto dedotto dallo studio degli ZERI e del SEGNO di $y = x^2 - 3x + 2$

★ CRESCENZA e DECRESCENZA della funzione:

dal grafico si osserva che

$y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ DECRESCE per $x \leq \frac{3}{2}$, o in $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

$y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ CRESCE per $x \geq \frac{3}{2}$, o in $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Es. Disegno il grafico di $y = x^2 + 2x + 1$

- VERTICE $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{2}{2}, 0\right) = (-1, 0)$

$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ CASO $\Delta = 0$

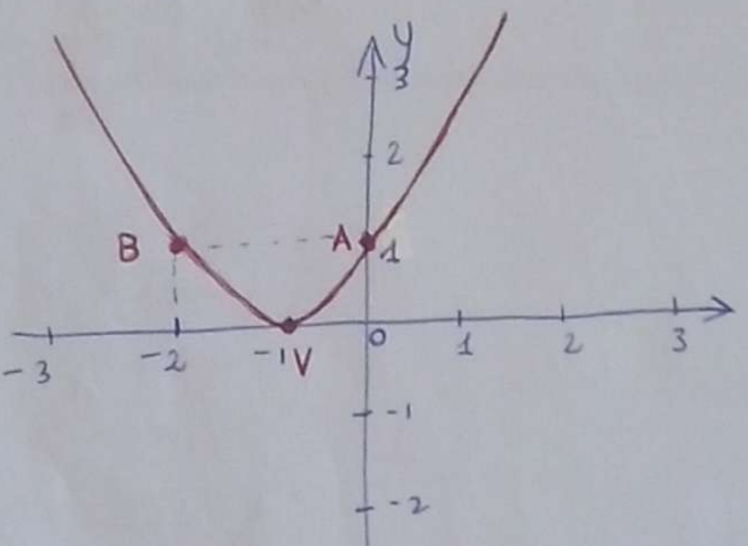
- Intersezione asse y:

$y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \rightarrow A(0,1)$

- Trovo un altro punto della parabola!

per es. scelgo $x = -2$

$\Rightarrow y = (-2)^2 + 2(-2) + 1 =$
$= 4 - 4 + 1 = 1 \rightarrow B(-2,1)$



DOMINIO: $(-\infty, +\infty)$

IMMAGINE: $[0, +\infty)$

Il grafico conferma quanto dedotto dallo studio degli ZERI e del SEGNO di $y = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x + 1$ DECRESCE per $x \leq -1$ (o $(-\infty, -1]$)

$x^2 + 2x + 1$ CRESCE per $x \geq 1$ (o $[1, +\infty)$)

★ Il **DOMINIO** della funzione quadratica
$y = ax^2 + bx + c$ è $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, $(-\infty, +\infty)$

★ L'**IMMAGINE** della funzione quadratica è:

- $[y_V, +\infty)$ se la parabola ha la concavità verso l'alto, con y_V ordinata del vertice.
- $(-\infty, y_V]$ se la parabola ha la concavità verso il basso.